

On estimating the magnitude of perturbations
in the rotational dynamics of asteroids
approaching the Earth

Alexander Melnikov, Kristina Lobanova

Pulkovo Observatory, Saint-Petersburg, Russia



Analytical Methods of Celestial Mechanics 2024,
Euler International Mathematical Institute, St. Petersburg, Russia
August 23, 2024

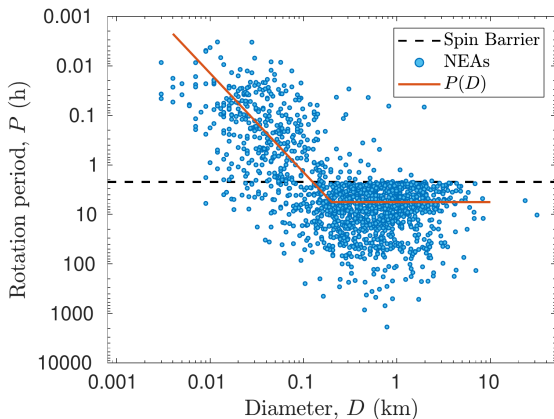
Approaches of asteroids to planets

- More than a million asteroids are currently known.
- A number of asteroids experience close approaches to planets.
Possible events: collision with a planet, destruction of an asteroid.
- Close approaches affect further orbital and rotational dynamics of the asteroid.

Main goals

- To investigate in detail the rotational dynamics of an asteroid during its close approach to the Earth.
- Determine the characteristic values of perturbations in the rotational dynamics of an asteroid due to its close approach to the Earth.
- To estimate the influence of the problem parameters on estimations the magnitude of disturbances in the rotational dynamics of asteroid during its close approach to the Earth.

Distribution of the rotation period measurements of NEAs



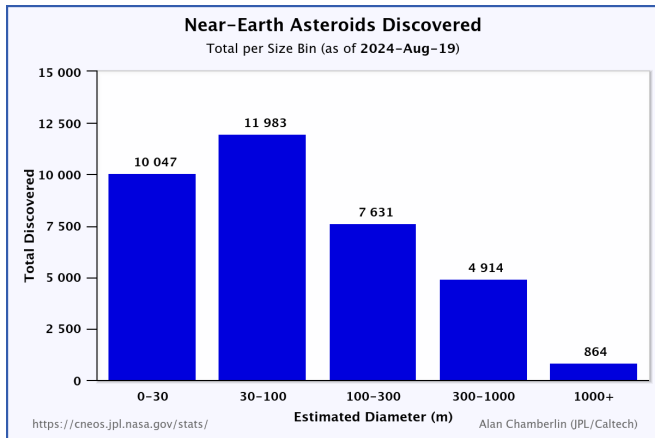
Distribution of the rotation period of Near-Earth Asteroids (NEAs), together with the rotational disruption limit of 2.2 h and the dependence of $P(D)$ on the diameter (figure from Fenucci et al., 2024).

$$P(D) = 5.6 \text{ h}, D \geq 200 \text{ m}.$$

$$P(D) = 5.6 \text{ h} \left(\frac{D}{0.2 \text{ km}} \right)^2, D < 200 \text{ m}.$$

Two groups of Near-Earth Asteroids

- Slowly rotating asteroids ($D = 100\text{--}1000$ m, $P = 10\text{--}100$ h).
- Small asteroids with fast rotation ($D < 100$ m, $P < 1$ h).



The asteroid is an absolutely rigid body, having the shape of a triaxial ellipsoid with the main central moments of inertia $A < B < C$. When modeling the rotational dynamics of an asteroid, we considered its motion along a fixed hyperbolic orbit relative to the Earth with the parameters: $d = a(e - 1)$, e (based on ephemeris NASA JPL¹).

The orientation of the asteroid and its rotation speed at the initial moment of time were specified by the Euler angles θ, φ, ψ and the angular velocity vector $\vec{\omega}$. Using the DOP853² integrator, dynamic and kinematic Euler equations were integrated. The following values were determined

$$\Delta P = P_{\text{final}} - P_0, \quad \Delta\gamma = \gamma_{\text{final}} - \gamma_0,$$

where $P_0 = 2\pi/\omega_c$ is the period of rotation of the asteroid at the initial point; $P_{\text{final}} = 2\pi/|\vec{\omega}|$ is the period of rotation of the asteroid at the final point; γ is the angle between the rotational axis and the normal to the orbital plane; $\vec{\omega} = (\omega_a, \omega_b, \omega_c)$ is angular velocity vector in the coordinate system rigidly connected to the asteroid body; $\omega_a = \omega_b = 0$ and $\theta = \psi = 0$, $\varphi \equiv \gamma_0$ at the initial time.

¹<https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/>

²E. Hairer et al., Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems, 1993

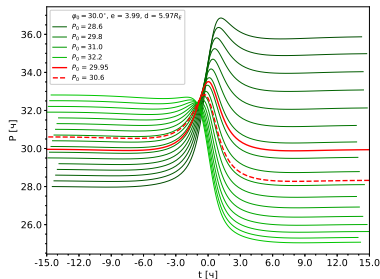
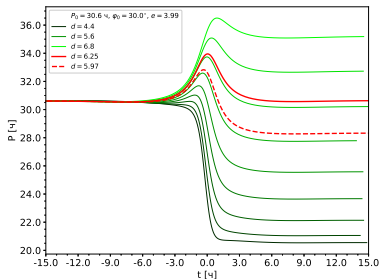
(99942) Apophis

- Discovered: June 19, 2004 (R.A. Tucker et al., Kitt Peak, Arizona).
- Diameter: ≈ 340 m.
- Next close approach to Earth: April 13, 2029.
- Minimum expected distance: 38 200 km ($\approx 6R_E$).
- Period of rotation: 30.6 h.

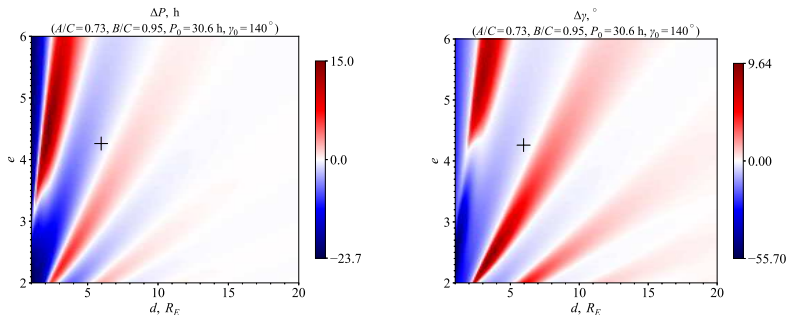
2012 TC4

- Discovered: October 2012 (Pan-STARRS1).
- Diameter: ~ 10 m.
- Close approach to the Earth: October 2012 and October 2017.
- Distance: 95 000 km ($\approx 15R_E$) и 50 000 km ($\approx 8R_E$).
- Period of rotation: 12 min.

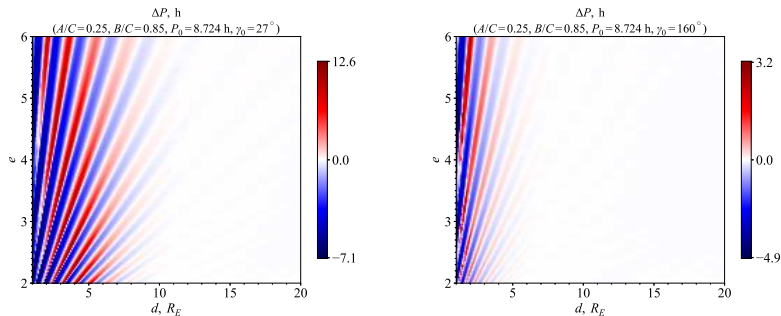
(367943) Duende ($D \approx 30$ m, $P \approx 8$ h), 2023 BU ($D \sim 10$ m, $P \approx 2$ min).



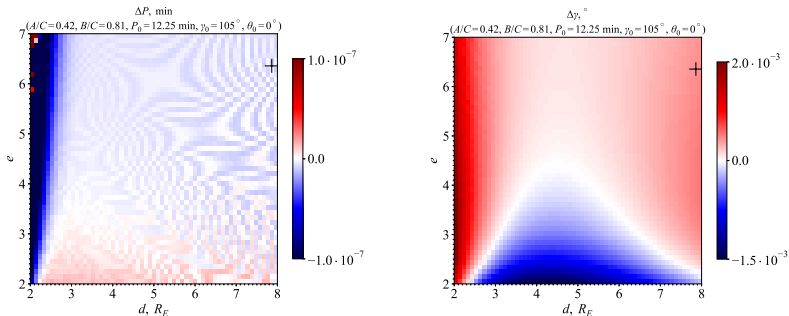
Changes in the rotation period of an asteroid as it approaches the Earth for different parameter values: d (left) and P_0 (right). The thick red curve corresponds to the approximate value of d (or P_0), at which $\Delta P = 0$. The dotted red curve corresponds to the value of parameter for Apophis (Pravec et al., 2014). Moment of time $t = 0$ corresponds to the asteroid passing the approach point.



Dependences of ΔP and $\Delta\gamma$ for Apophis due to its approach to the Earth in 2029 on the orbital parameters $d = a(e - 1)$ (within Earth's radii) and e . The cross indicates current position of Apophis ($d = 5.96$, $e = 4.26$).

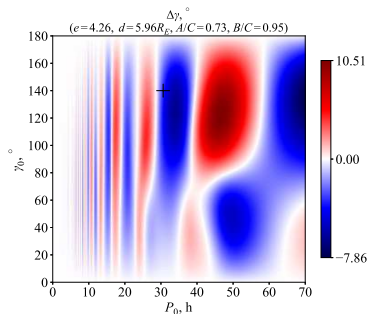
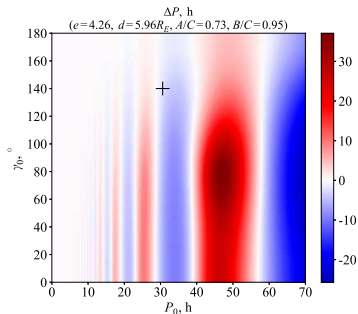


Dependences of ΔP for Duende due to its approach to the Earth in 2013 on the orbital parameters $d = a(e - 1)$ (within Earth's radii) and e ; ($d = 5.34, e = 4.22$).



Dependences of ΔP and $\Delta \gamma$ for 2012 TC4 due to its approach to the Earth in 2017 on the orbital parameters $d = a(e - 1)$ (within Earth's radii) and e . The cross indicates current position of 2012 TC4 ($d = 7.86, e = 6.36$).

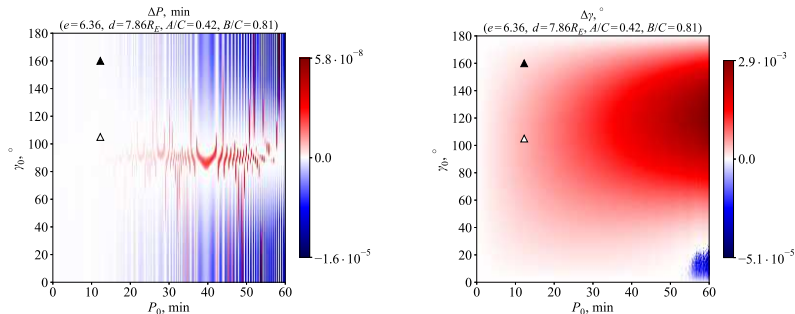
Influence of the initial rotational state (Apophis)



Dependences of ΔP and $\Delta\gamma$ for Apophis due to its approach to the Earth in 2029 on the possible initial (before the moment of approach) values of P_0 and γ_0 . The cross indicates current position of Apophis (Pravec et al., 2014).

Most probable: $|\Delta P| = 10\text{--}15$ h, $|\Delta\gamma| \sim 10^\circ$.

Influence of the initial rotational state (2012 TC4)



Dependences of ΔP and $\Delta \gamma$ for 2012 TC4 due to its approach to the Earth in 2017 on the possible initial (before the moment of approach) values of P_0 and γ_0 . The triangles indicates current position of 2012 TC4 (Lee et al., 2021).

Most probable: $|\Delta P| \sim 10^{-5}$ min, $|\Delta \gamma| \sim 0.01^\circ$.

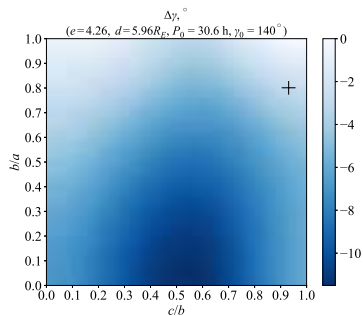
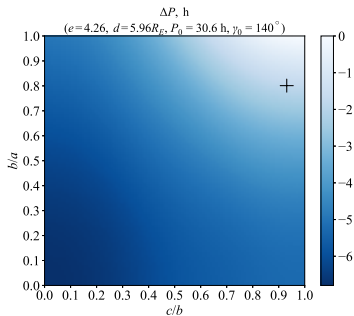
The figure of small asteroids is usually unknown or poorly defined. We studied the influence of the asteroid's figure (which may be described through its moments of inertia $A < B < C$) on ΔP and $\Delta\gamma$.

For the case of a triaxial ellipsoid ($a > b > c$) of uniform density we have:

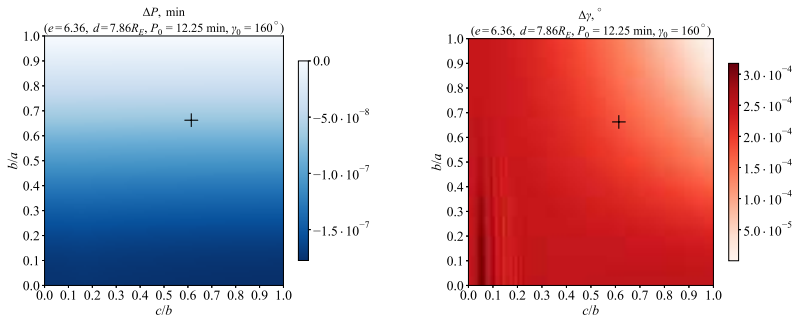
$$\frac{A}{C} = \frac{b^2 + c^2}{a^2 + b^2}, \quad \frac{B}{C} = \frac{a^2 + c^2}{a^2 + b^2},$$

$$\frac{c}{b} = \sqrt{\frac{-1 + A/C + B/C}{1 + A/C - B/C}}, \quad \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{1 + A/C - B/C}{1 - A/C + B/C}}.$$

By varying c/b and b/a , we consider all possible values of A/C and B/C .

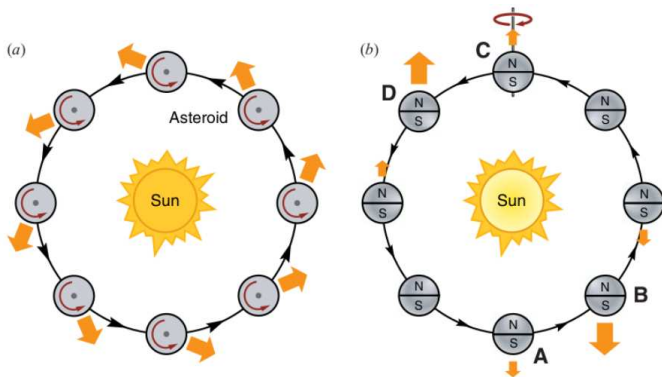


Dependences of ΔP change in rotational period and $\Delta \gamma$ change in angle characterizing the deviation of the rotational axis from the normal to the orbital plane, for the asteroid Apophis due to its approach to the Earth in 2029, from the parameters c/b and b/a , characterizing the figure of the asteroid. The cross indicates possible position of the asteroid (Pravec et al., 2014).



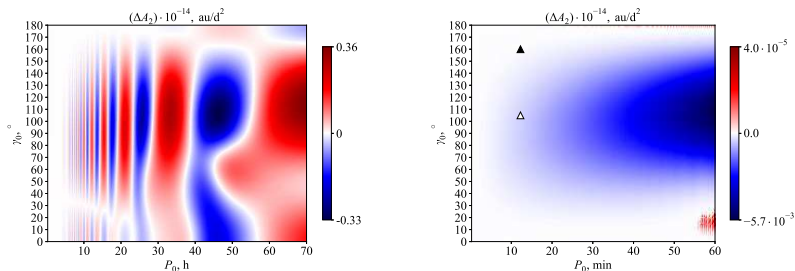
Dependences of ΔP change in rotational period and $\Delta \gamma$ change in angle characterizing the deviation of the rotational axis from the normal to the orbital plane, for the asteroid 2012 TC4 due to its approach to the Earth in 2017, from the parameters c/b and b/a , characterizing the figure of the asteroid. The cross indicates possible position of the asteroid (Lee et al., 2021).

Yarkovsky effect: qualitative description



Schematic representation of the diurnal (a) and seasonal (b) Yarkovsky effect (figure from Bottke et al., 2006). The cause of the Yarkovsky effect is the non-zero thermal inertia of the body.

Influence of perturbations on the Yarkovsky effect



Left: Dependence of the parameter $\Delta A_2 = A_2^{\text{final}} - A_2^0$, which characterizes the change in the magnitude of the Yarkovsky effect, on the possible initial (before the moment of approach) values of P_0 and γ_0 for Apophis during its approach to the Earth in 2029. The cross indicates possible position of the asteroid (Pravec et al., 2014). **Right:** The same for asteroid 2012 TC4 during its approach to the Earth in 2017. The triangles indicate possible positions of asteroids (Lee et al., 2021).

Apophis: $A_2 = -2.9 \cdot 10^{-14} \text{ au/d}^2 \rightarrow -2.4 \cdot 10^{-14} \text{ au/d}^2$ or $-3.2 \cdot 10^{-14} \text{ au/d}^2$.

- Our numerical modeling of small asteroids approaching the Earth has shown that significant perturbations in the rotational dynamics of an asteroid take place only when it approaches the planet at a distance of less than 10 Earth radii.
- In case of asteroids with the rotational period $P > 5$ h encounters with the Earth may lead to noticeable changes in the rotational speed and the orientation of the rotational axis. In addition, precise knowledge of the asteroid figure is needed for the accurate estimation of the perturbation value.
- On the contrary, for the asteroids with fast rotation ($P < 1$ h) perturbations in the rotational motion are negligible, and the figure of an asteroid has little influence on their value.
- Perturbations in rotation arising due to the approach to the Earth will affect the magnitude of the Yarkovsky effect for asteroids with slow rotation and will be unnoticeable in the case of asteroids with very fast rotation.

Acknowledgements: The study was funded by a grant Russian Science Foundation № 23-22-00306, <https://rscf.ru/project/23-22-00306/>.

Thank you for your attention!

Динамические уравнения Эйлера:

$$\begin{aligned}
 A \frac{d\omega_a}{dt} - \omega_b \omega_c (B - C) &= -3 \frac{GM}{r^3} \beta \gamma (B - C), \\
 B \frac{d\omega_b}{dt} - \omega_c \omega_a (C - A) &= -3 \frac{GM}{r^3} \gamma \alpha (C - A), \\
 C \frac{d\omega_c}{dt} - \omega_a \omega_b (A - B) &= -3 \frac{GM}{r^3} \alpha \beta (A - B),
 \end{aligned} \tag{1}$$

где G — гравитационная постоянная; M — масса Земли; $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ — проекции вектора угловой скорости вращения астероида $\vec{\omega}$ на оси a, b, c ; $r = a(e^2 - 1)/(1 + e \cos f)$ — расстояние “астероид — Земля”, где a — большая полуось орбиты, $e > 1$ — эксцентриситет, f — истинная аномалия; α, β, γ — направляющие косинусы главных осей инерции относительно направления на Землю.

Кинематические уравнения Эйлера и выражения для направляющих косинусов:

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= \frac{\omega_c \cos \psi - \omega_a \sin \psi}{\cos \phi}, \\ \frac{d\phi}{dt} &= \omega_a \cos \psi + \omega_c \sin \psi, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_b - (\omega_c \cos \psi - \omega_a \sin \psi) \operatorname{tg} \phi,\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}\alpha &= \cos(\theta - f) \cos \psi - \sin(\theta - f) \sin \phi \sin \psi, \\ \beta &= -\sin(\theta - f) \cos \phi, \\ \gamma &= \cos(\theta - f) \sin \psi + \sin(\theta - f) \sin \phi \cos \psi.\end{aligned}\tag{3}$$

При пространственном вращении астероида в кинематических уравнениях Эйлера присутствует сингулярность при $\phi = \pm\pi/2$. Чтобы избавиться от сингулярности, при численном интегрировании мы вместо углов Эйлера использовали переменные Родрига–Гамильтона $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, связанные с углами Эйлера следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\psi}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\psi}{2}, \\ \lambda_1 &= \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\psi}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\psi}{2}, \\ \lambda_2 &= \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\psi}{2}, \\ \lambda_3 &= \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\psi}{2}.\end{aligned}\tag{4}$$

Переменные Родрига–Гамильтона (РГ) являются регулярными во всей области задания $\lambda_i \in [-1, 1]$, $i = 0, \dots, 3$. При использовании переменных РГ вместо кинематических уравнений Эйлера (2), представляющих собой систему из трех уравнений, мы имеем систему из четырех дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\lambda_0}{dt} &= -\frac{1}{2}(\lambda_1\omega_a + \lambda_2\omega_b + \lambda_3\omega_c), \\
 \frac{d\lambda_1}{dt} &= \frac{1}{2}(\lambda_0\omega_a - \lambda_3\omega_b + \lambda_2\omega_c), \\
 \frac{d\lambda_2}{dt} &= \frac{1}{2}(\lambda_3\omega_a + \lambda_0\omega_b - \lambda_1\omega_c), \\
 \frac{d\lambda_3}{dt} &= -\frac{1}{2}(\lambda_2\omega_a - \lambda_1\omega_b - \lambda_0\omega_c).
 \end{aligned} \tag{5}$$

Направляющие косинусы в параметрах Родрига–Гамильтона имеют вид

$$\begin{aligned}
 \alpha &= (\lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2) \cos f + 2(\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2) \sin f, \\
 \beta &= 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3) \cos f + (\lambda_0^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2) \sin f, \\
 \gamma &= 2((\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3) \cos f + (\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1) \sin f).
 \end{aligned} \tag{6}$$

Для вычисления скорости изменения величины большой полуоси астероида под влиянием ЭЯ необходима касательная компонента возмущающей силы f_Y . В предположении об околокруговой орбите общая формула для средней скорости имеет вид

$$\frac{da}{dt} = \frac{2f_Y}{n}, \quad (7)$$

где n — среднее движение астероида. Суммарная величина ЭЯ складывается из суточной и сезонной компонент. В обоих случаях мы будем иметь дело с выражением вида

$$f_Y = \frac{2}{\rho R} \frac{\varepsilon \sigma T^4}{c} \frac{\Delta T_\nu}{T} \tilde{f}(\gamma), \quad (8)$$

где ρ — плотность астероида, R — радиус однородного шара с объемом, равным объему астероида, ε — излучательная способность поверхности астероида, σ — постоянная Стефана–Больцмана, c — скорость света, ΔT — разность температур между наиболее и наименее нагретой частями поверхности астероида, $\tilde{f}(\gamma)$ — некоторая функция угла γ между осью вращения астероида и перпендикуляром к плоскости его орбиты, T — средняя температура астероида, вычисляемая по формуле

$$T^4 = \frac{\alpha S}{4\varepsilon\sigma},$$

где α — коэффициент поглощения на поверхности астероида, $S = 1370 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \left(\frac{a_\oplus}{a}\right)^2$ — поток солнечной энергии для астероида с большой полуосью a , a_\oplus — большая полуось земной орбиты.

Для суточного эффекта Ярковского полагают:

$$\tilde{f}(\gamma) = \cos \gamma, \quad \frac{\Delta T_\omega}{T} = 0.667 \frac{\Theta_\omega}{1 + 2.03 \Theta_\omega + 2.04 \Theta_\omega^2}, \quad (9)$$

где параметр

$$\Theta_\omega = \frac{\sqrt{\rho C K \omega}}{2\pi \epsilon \sigma T^3} \quad (10)$$

характеризует отношение времени температурной релаксации к рассматриваемому периоду времени (в случае суточного ЭЯ берется период вращения астероида P); C — удельная теплоемкость астероида, K — коэффициент теплопроводности, ρ — средняя плотность астероида, $\omega = 2\pi/P$ — частота вращения астероида.

Суточный ЭЯ будет приводить к $da/dt > 0$ для наклонов оси вращения $0 < \gamma < \pi/2$ (проградное движение: направления вращения и орбитального движения астероида совпадают) и $da/dt < 0$ для $\pi/2 < \gamma < \pi$ (ретроградное движение).

Для больших значений параметра $\Theta_\omega \gg 1$ (малых значений P) справедливо соотношение

$$\frac{\Delta T_\omega}{T} \sim \Theta_\omega^{-1} \sim \sqrt{P},$$

т. е. возмущающая сила стремится к нулю.

Для сезонного ЭЯ полагают: $\tilde{f}(\gamma) = -\sin^2 \gamma$ и $da/dt \leq 0$ при любом угле наклона оси вращения астероида. Температурный множитель имеет вид

$$\frac{\Delta T_n}{T} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \tau} A_n \sin \delta_n, \quad (11)$$

где $\tau = \frac{\pi l_s}{2R} \Theta_n$, параметр Θ_n вычисляется аналогично суточному случаю (см. (10)) с заменой частоты ω на среднее движение астероида n , а величина $l_s = \sqrt{K/\rho C n}$ представляет собой характерную глубину проникновения тепловой волны. Множитель $A_n \sin \delta_n$, (A_n — амплитуда, δ_n — фаза гармоника, соответствующей частоте $\nu = n$) находится из решения уравнения теплопроводности.

Суммарная величина ЭЯ вычисляется по формуле

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n} \left(f_Y^{(d)} + f_Y^{(s)} \right), \quad (12)$$

где $f_Y^{(d)}$ и $f_Y^{(s)}$ вычисляются при помощи уравнения (8) с учетом выражений (9) и (11) для температурного множителя в случаях суточного и сезонного ЭЯ соответственно.

Перейдем от величины da/dt к параметру A_2 , связь которого с da/dt дается следующей формулой:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a\sqrt{1-e^2}}{nr} A_2 g(r), \quad (13)$$

где $g(r)$ — некоторая функция гелиоцентрического расстояния r : $g(r) = (r_0/r)^d$, где $r_0 = 1$ а.е. — нормализующий параметр, а значение показателя d для большинства АСЗ заключено в пределах от 2 до 3 и слабо влияет на величину da/dt . Обычно принимают $d = 2$.

В случае круговой орбиты: $e = 0$ и $r = a$. Тогда формула (13) принимает вид

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n} A_2 g(r), \quad (14)$$

а с учетом (8) получаем

$$A_2 = \frac{f_Y}{g(r)} = f_Y \cdot \left(\frac{a}{1 \text{ а.е.}} \right)^2. \quad (15)$$